

Обратите внимание: в этом вопроснике есть специальные инструкции. Отвечайте на вопросы, следуя этим инструкциям.

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות. יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

Математика

5 единиц обучения – второй вопросник

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות

Указания

- Продолжительность экзамена: 3 часа.
- Строение вопросника и ключ к оценке:

В этом вопроснике два раздела, и в них пять вопросов. Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа. Раздел второй – рост и затухание, степенные функции, показательные и логарифмические функции. Вы должны ответить на три вопроса по своему выбору – $3 \times 33 \frac{1}{3} = 100$ баллов.
- Разрешенный вспомогательный материал:
 - Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, в котором есть возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
 - Листы с формулами (прилагаются).
 - Двуязычный словарь.
- Особые указания:
 - Не переписывайте вопрос; отметьте только его номер.
 - Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка будет снижена или экзамен будет аннулирован.

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות. פרק ראשון – גאומטרייה אנליטית, וקטורים, טריגונומטרייה במרחב, מספרים מרוכבים. פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות. יש לענות על שלוש שאלות לבחירתכם – $3 \times 33 \frac{1}{3} = 100$ נקודות.
- חומר עזר מותר בשימוש:
 - מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 - דפי נוסחאות (מצורפים).
 - מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.
- הוראות מיוחדות:
 - אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
 - יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה. כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טייטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение любых черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Вопросы

Ответьте на три из вопросов 1–5 (за каждый вопрос – $33\frac{1}{3}$ балла).

Обратите внимание: если вы ответите более чем на три вопроса, будут проверены только первые три из ответов в вашей тетради.

Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа

1. Дан ромб $ABCD$. Диагонали ромба лежат на осях координат, как показано на чертеже ниже.

Дано: длина диагонали AC равна 10 ;

расстояние каждой из сторон ромба от точки начала координат равно $\sqrt{5}$.

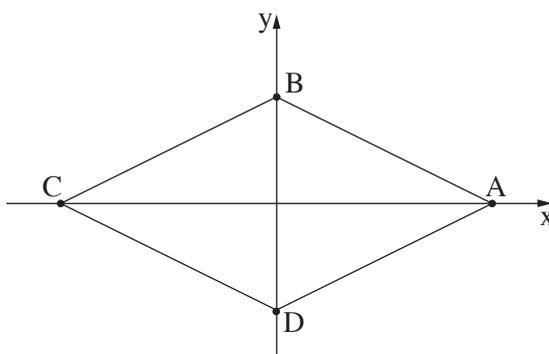
(а) Найдите уравнение стороны AB .

В данный ромб вписана окружность.

(б) Найдите уравнение этой окружности.

Точка M – это точка касания окружности и ромба в первом квадранте.

(в) Найдите координаты точки M .



Из точки M проводят перпендикуляр к оси x , пересекающий ее в точке $K(a, 0)$.

На прямой $x = -a$ обозначают точку E и проводят через нее прямую, параллельную оси x .

Эта параллельная прямая пересекает серединный перпендикуляр к отрезку EK в точке G .

(г) Покажите, что геометрическое место всех точек G , образованных подобным образом, лежит на параболе, и найдите ее уравнение.

Точка N лежит в первом квадранте на параболе, уравнение которой вы нашли.

Координата x точки N равна 5 .

(д) Найдите уравнение двух окружностей с центром в точке N , которые являются касательными к окружности, вписанной в данный ромб.

2. На чертеже справа изображена пирамида $SABCD$, основание которой $ABCD$ – квадрат.

Точка E – точка пересечения диагоналей основания,

а точка F – середина стороны BC .

Обозначим: $\vec{SB} = \underline{w}$, $\vec{SF} = \underline{v}$, $\vec{SE} = \underline{u}$.

(а) Выразите векторы \vec{BC} и \vec{DC} при помощи \underline{u} , \underline{v} и \underline{w} .

Отрезок SE – это высота пирамиды.

Дано: $|\underline{u}| = 7$.

(б) Найдите значение $\underline{u} \cdot \underline{w}$.

Дано: $\vec{BA} = (-3, 4, 5)$.

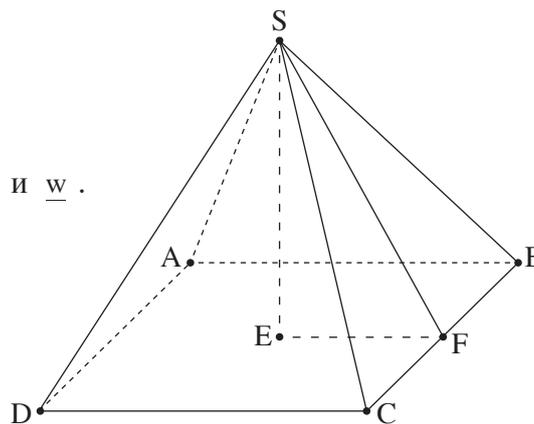
(в) Найдите величину угла между SB и основанием пирамиды.

Дано: $E(0, 4, 5)$; плоскость основания $ABCD$ параллельна оси z .

(г) Найдите уравнение плоскости, в которой лежит основание пирамиды.

Дано: координата x вершины B равна 3.

(д) Найдите координаты вершины B .



3. (а) (1) Найдите решения уравнения: $z^6 + 64i = 0$ (z – комплексное число).

(2) Найдите четыре решения уравнения: $\frac{z^6 + 64i}{z^2 - 4i} = 0$ (z – комплексное число).

Решениям, которые вы нашли при ответе на вопрос подпункта (а)(2), соответствуют вершины четырехугольника в гауссовой плоскости.

(б) Найдите площадь этого четырехугольника.

Этот четырехугольник поворачивают (вокруг начала координат) на угол α против часовой стрелки, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

(в) Каково значение произведения всех чисел, которые соответствуют вершинам этого четырехугольника, при $\alpha = 45^\circ$? Обоснуйте свой ответ.

(г) (1) Найдите два значения α , при которых произведение всех чисел, соответствующих вершинам этого четырехугольника после его вращения, будет чисто мнимым числом.

(2) Каково значение произведения для каждого из значений α , которые вы нашли?

Раздел второй – рост и затухание, степенные функции, показательные и логарифмические функции

4. Дана функция $k(x) = xe^x$ и дана функция $m(x) = 2e^x - 1$, определенные для любого x .

- (к) (1) Найдите уравнение асимптоты, перпендикулярной оси y , для каждой из функций $k(x)$ и $m(x)$.
- (2) Найдите области возрастания и убывания каждой из функций $k(x)$ и $m(x)$ (если таковые существуют).
- (3) Найдите координаты точки пересечения каждого из графиков функций $k(x)$ и $m(x)$ с осью y .

Графики функций $k(x)$ и $m(x)$ пересекаются в точности в двух точках: в одной из них $x = a$, а в другой $x = b$, $b > a$.

(д) Начертите в одной системе координат схематические графики функции $k(x)$ и функции $m(x)$.

Дана функция $f(x) = \frac{e^x - 1}{x - 1}$, определенная для любого $x \neq 1$.

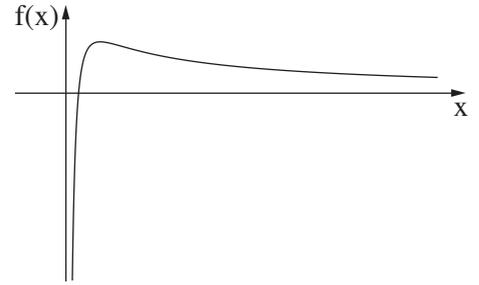
- (л) (1) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат.
- (2) Найдите координаты точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью x .
- (т) Объясните, почему уравнение $f'(x) = 0$ имеет в точности два решения.
- (н) (1) Объясните, почему $1 < b$.
- (2) Выразите при помощи a и b области возрастания и убывания функции $f(x)$.
- (й) Начертите схематический график функции $f(x)$.

5. На чертеже справа изображен график функции $f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}$, определенной в области $x > 0$.

(а) Найдите координаты точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью x .

Дана функция $g(x)$, определенная в области $x > 0$,
 для которой выполняется $g'(x) = f(x)$.

Координата y точки экстремума функции $g(x)$ равна $-\frac{1}{4}$.



(б) (1) Найдите функцию $g(x)$.

(2) Найдите координаты точек пересечения графика
 функции $g(x)$ с осью x .

(3) Начертите схематический график функции $g(x)$.

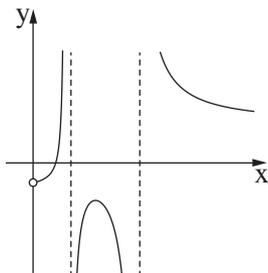
Дана функция $h(x)$, определенная как $h(x) = 1 + \frac{b}{g(x)}$, b – параметр, больший $\frac{1}{4}$.

(а) (1) Найдите область определения функции $h(x)$.

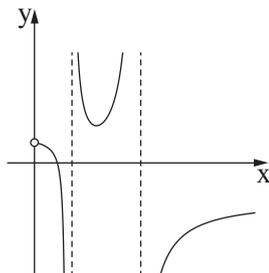
(2) Определите, пересекает ли график функции $h(x)$ ось x . Обоснуйте свой ответ.

(б) Найдите координаты точки экстремума функции $h(x)$ и определите ее тип. При
 необходимости выразите свой ответ при помощи b .

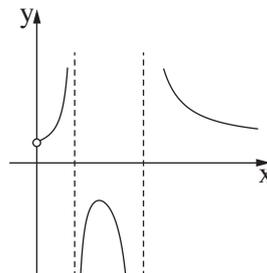
(в) Определите, какой из графиков I–IV соответствует функции $h(x)$.



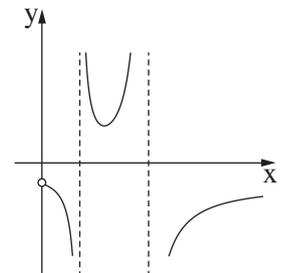
IV



III



II



I

Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
 Копировать или публиковать можно только
 с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
 אין להעתיק או לפרסם
 אלא ברשות משרד החינוך.